Zadatak 041 (Marina, Željka, Marija, Luka, Vesna, Martina, TUPŠ)

Dokaži da za svako $x \in R$ vrijedi jednakost: $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2.$

Rješenje 041

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Za $x \ge 0$ je $|x| = x$ pa vrijedi:

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=\left(\frac{x+x}{2}\right)^2+\left(\frac{x-x}{2}\right)^2=\left(\frac{2\cdot x}{2}\right)^2+\left(\frac{x-x}{2}\right)^2=x^2+\left(\frac{0}{2}\right)^2=x^2+0=x^2.$$

Za $x < 0$ je $|x| = -x$ pa vrijedi:

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=\left(\frac{x-x}{2}\right)^2+\left(\frac{x-(-x)}{2}\right)^2=\left(\frac{x-x}{2}\right)^2+\left(\frac{x+x}{2}\right)^2=\left(\frac{0}{2}\right)^2+\left(\frac{2\cdot x}{2}\right)=0+x^2=x^2.$$

Vježba 041

Dokaži da za svako $x \in R$ vrijedi jednakost: $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^4+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^4=x^4.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 042 (Marina, gimnazija)

Pojednostavni: $A=\dfrac{a^2+1}{a\cdot\sqrt{\left(\dfrac{a^2-1}{2\cdot a}\right)^2+1}},\ a \ne 0.$

Rješenje 042

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \sqrt{a^2}=|a| \quad , \quad |a\cdot b|=|a|\cdot|b| \quad , \quad \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$$

$$A=\frac{a^2+1}{a\cdot\sqrt{\left(\frac{a^2-1}{2\cdot a}\right)^2+1}}=\frac{a^2+1}{a\cdot\sqrt{\frac{a^4-2\cdot a^2+1}{4\cdot a^2}+1}}=\frac{a^2+1}{a\cdot\sqrt{\frac{a^4-2\cdot a^2+1+4\cdot a^2}{4\cdot a^2}}}=$$

$$=\frac{a^2+1}{a\cdot\sqrt{\frac{a^4+2\cdot a^2+1}{4\cdot a^2}}}=\frac{a^2+1}{a\cdot\sqrt{\frac{\left(a^2+1\right)^2}{4\cdot a^2}}}=\frac{a^2+1}{a\cdot\sqrt{\left(\frac{a^2+1}{2\cdot a}\right)^2}}=\frac{a^2+1}{a\cdot\left|\frac{a^2+1}{2\cdot a}\right|}=\frac{a^2+1}{a\cdot\frac{\left|a^2+1\right|}{\left|2\cdot a\right|}}=\frac{a^2+1}{a\cdot\frac{a^2+1}{2\cdot\left|a\right|}}=$$

$$=\frac{a^2+1}{a\cdot\frac{a^2+1}{2\cdot\left|a\right|}}=\frac{2\cdot\left|a\right|}{a}.$$

Sada je:

- $$a>0\ \Rightarrow\ \left|a\right|=a\ \Rightarrow\ A=\frac{2\cdot a}{a}=\frac{2\cdot a}{a}=2$$
- $$a<0\ \Rightarrow\ \left|a\right|=-a\ \Rightarrow\ A=\frac{2\cdot(-a)}{a}=\frac{-2\cdot a}{a}=-2.$$

Rješenje:

$$A=\begin{cases}2 & \text{za } a>0\\ -2 & \text{za } a<0.\end{cases}$$

Vježba 042

Pojednostavni: $A=\frac{a\cdot\sqrt{\left(\frac{a^2-1}{2\cdot a}\right)^2+1}}{a^2+1}.$

Rezultat: $A=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{za } a>0\\ -\frac{1}{2} & \text{za } a<0.\end{cases}$

Zadatak 043 (Megy, maturantica gimnazije)

Nacrtaj graf funkcije: $|x| + |y| = 1$.

Rješenje 043

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$\left|x\right|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Promotrimo slučaj za $y \geq 0$:

$$y\geq 0\ \Rightarrow\ \left|y\right|=y\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}\left|x\right|+\left|y\right|=1\\ \left|y\right|=y\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left|x\right|+y=1\ \Rightarrow\ y=-\left|x\right|+1.$$

- ako je $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow y = -x + 1$
- ako je $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow y = x + 1.$

Promotrimo slučaj za y < 0:

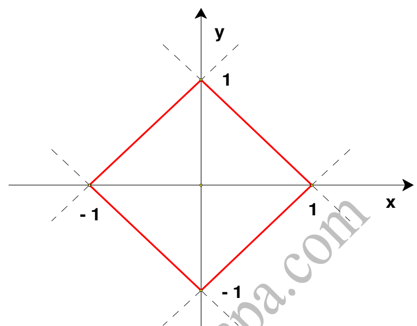
$$y < 0 \Rightarrow |y| = -y \Rightarrow \left.\begin{matrix} |x| + |y| = 1 \\ |y| = -y \end{matrix}\right\} \Rightarrow |x| - y = 1 \Rightarrow -y = -|x| + 1 \;/\cdot(-1) \Rightarrow y = |x| - 1.$$

- ako je $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow y = x - 1$
- ako je $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow y = -x - 1.$

Sada je:

$$\left.\begin{matrix} y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow I.\text{ kvadrant} \Rightarrow y = -x + 1 \quad , \quad \left.\begin{matrix} y \geq 0 \\ x < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow II.\text{ kvadrant} \Rightarrow y = x + 1,$$

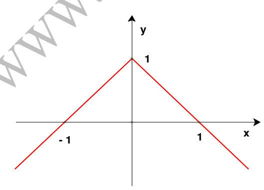
$$\left.\begin{matrix} y < 0 \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow IV.\text{ kvadrant} \Rightarrow y = x - 1 \quad , \quad \left.\begin{matrix} y < 0 \\ x < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow III.\text{ kvadrant} \Rightarrow y = -x - 1.$$



Vježba 043

Nacrtaj graf funkcije: $|x| + y = 1$.

Rezultat:



Zadatak 044 (Emy, gimnazija)

Pojednostavni izraz: $\dfrac{\sqrt{a^2 - 4 \cdot a + 4}}{a - 2} - \dfrac{a - 2}{a^2 - 4}, \; a \neq \pm 2.$

Rješenje 044

Ponovimo!

$$(x - y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2 \quad , \quad x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y).$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.

$$\frac{\sqrt{a^2-4\cdot a+4}}{a-2}-\frac{a-2}{a^2-4}=\frac{\sqrt{(a-2)^2}}{a-2}-\frac{a-2}{a^2-4}=\frac{|a-2|}{a-2}-\frac{a-2}{a^2-4}=\frac{|a-2|}{a-2}-\frac{a-2}{(a-2)\cdot(a+2)}=$$

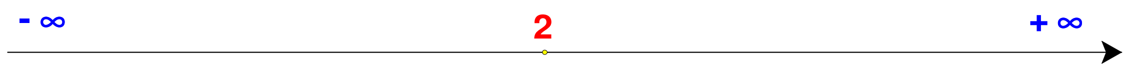
$$=\frac{|a-2|}{a-2}-\frac{a-2}{(a-2)\cdot(a+2)}=\frac{|a-2|}{a-2}-\frac{1}{a+2}.$$

Iz a – 2 = 0 nalazimo karakterističnu točku (KT) modula:

$$a-2=0\ \Rightarrow\ a=2\ \text{KT}.$$

Karakteristična točka a = 2 dijeli brojevni pravac na dva dijela:

$$a<2\quad,\quad a>2.$$



Je li izraz pod znakom modula pozitivan ili negativan, provjeravamo uvrštavanjem jednog broja manjeg od KT i jednog većeg od KT, a zatim primijenimo definiciju modula (apsolutne vrijednosti).

Prvi slučaj

Za $a<2$ izraz a – 2 je negativan pa vrijedi:

$$|a-2|=-(a-2)=-a+2.$$

Zato je:

$$\frac{|a-2|}{a-2}-\frac{1}{a+2}=\frac{-a+2}{a-2}-\frac{1}{a+2}=\frac{-(a-2)}{a-2}-\frac{1}{a+2}=\frac{-(a-2)}{a-2}-\frac{1}{a+2}=-1-\frac{1}{a+2}=$$

$$=\frac{-(a+2)-1}{a+2}=\frac{-a-2-1}{a+2}=\frac{-a-3}{a+2}.$$

Drugi slučaj

Za $a>2$ izraz a – 2 je pozitivan pa vrijedi:

$$|a-2|=a-2.$$

Zato je:

$$\frac{|a-2|}{a-2}-\frac{1}{a+2}=\frac{a-2}{a-2}-\frac{1}{a+2}=\frac{a-2}{a-2}-\frac{1}{a+2}=1-\frac{1}{a+2}=\frac{a+2-1}{a+2}=\frac{a+1}{a+2}.$$

Vježba 044

Pojednostavni izraz: $\frac{\sqrt{a^2-4\cdot a+4}}{a-2},\ a\neq 2.$

Rezultat: $\begin{cases}1, & a>2\\ -1, & a<2.\end{cases}$

Zadatak 045 (Valentina, maturantica)

Koliko rješenja u skupu Z ima nejednadžba $|x+2|<\frac{3}{4}$?

A. 0 *B.* 1 *C.* 2 *D.* 3 *E.* beskonačno mnogo

Rješenje 045

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x|$ = x.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.

$$|x| < a \ , \ a > 0 \Rightarrow -a < x < a.$$

$$|x+2| < \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{3}{4} < x+2 < \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{3}{4} < x+2 < \frac{3}{4} \ /-2 \Rightarrow -\frac{3}{4}-2 < x+2-2 < \frac{3}{4}-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{4}-2 < x+2-2 < \frac{3}{4}-2 \Rightarrow -\frac{11}{4} < x < -\frac{5}{4} \Rightarrow -2\frac{3}{4} < x < -1\frac{1}{4} \Rightarrow x \in \{-2\}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 045

Koliko rješenja u skupu Z ima nejednadžba $|x+2| < 1$?

A. 0 *B.* 1 *C.* 2 *D.* 3 *E.* beskonačno mnogo

Rezultat: Odgovor je pod B.

Zadatak 046 (Vlado, maturant)

Riješi jednadžbu: $|x+2| = |5 \cdot x - 14|$.

Rješenje 046

Ponovimo!

Za dani realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ ako je } x \geq 0 \\ -x, \text{ ako je } x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.

Ako je

$$|a| = |b|,$$

onda je

$$a = b \quad \text{ili} \quad a = -b.$$

Postoje dvije mogućnosti zbog definicije apsolutne vrijednosti:

$$|x+2| = |5 \cdot x - 14| \Rightarrow \begin{matrix} x+2 = 5 \cdot x - 14 & \text{1. mogućnost} \\ x+2 = -(5 \cdot x - 14) & \text{2. mogućnost} \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \begin{matrix} x+2 = 5 \cdot x - 14 \\ x+2 = -(5 \cdot x - 14) \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x+2 = 5 \cdot x - 14 \\ x+2 = -5 \cdot x + 14 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \begin{matrix} x - 5 \cdot x = -14 - 2 \\ x + 5 \cdot x = 14 - 2 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \begin{matrix} -4 \cdot x = -16 \ /:(-4) \\ 6 \cdot x = 12 \ /:6 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{matrix} \Bigg\}.$$

Vježba 046

Riješi jednadžbu: $|x+1| = |3 \cdot x - 1|$.

Rezultat: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$.

Zadatak 047 (Nikolina, gimnazija)

Koliko ima uređenih parova brojeva (i, j) takvih da je $i, \ j \in \{1, 2, 3, 4, \ldots, 20\}$ i $|i - j| \leq 2$?

Rješenje 047

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, \ x \geq 0 \\ -x, \ x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.

$$|x| \le a \;,\; a > 0 \;\Rightarrow\; -a \le x \le a.$$

Riješimo se znaka apsolutne vrijednosti:

$$|i - j| \le 2 \;\Rightarrow\; -2 \le i - j \le 2.$$

Budući da su i, j prirodni brojevi iz skupa $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 20\}$, a razlika i – j mora biti između – 2 i 2 uključujući – 2 i 2, dobije se sustav jednadžbi:

$$i - j = -2 \quad , \quad i - j = -1 \quad , \quad i - j = 0 \quad , \quad i - j = 1 \quad , \quad i - j = 2.$$

Tražimo broj rješenja svake jednadžbe:

$i - j = -2$	
i	**j**
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7
6	8
7	9
8	10
9	11
10	12
11	13
12	14
13	15
14	16
15	17
16	18
17	19
18	20
Ukupno 18 rješenja	

$i - j = -1$	
i	**j**
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	7
7	8
8	9
9	10
10	11
11	12
12	13
13	14
14	15
15	16
16	17
17	18
18	19
19	20
Ukupno 19 rješenja	

$i - j = 0$	
i	**j**
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10
11	11
12	12
13	13
14	14
15	15
16	16
17	17
18	18
19	19
20	20
Ukupno 20 rješenja	

$i - j = 1$	
i	**j**
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	7
9	8
10	9
11	10
12	11
13	12
14	13
15	14
16	15
17	16
18	17
19	18
20	19
Ukupno 19 rješenja	

$i - j = 2$	
i	**j**
3	1
4	2
5	3
6	4
7	5
8	6
9	7
10	8
11	9
12	10
13	11
14	12
15	13
16	14
17	15
18	16
19	17
20	18
Ukupno 18 rješenja	

Ukupno parova ima:

$$18 + 19 + 20 + 19 + 18 = 94.$$

Vježba 047

Koliko ima uređenih parova brojeva (i, j) takvih da je $i, \; j \in \{1, 2, 3, 4, \ldots, 20\}$ i $|i - j| < 1$?

Rezultat: 20.

Zadatak 048 (Valentina, gimnazija)

$$\text{Izračunaj}: 5 \cdot \left| \sqrt{3} - 4 \right| + 4 \cdot \left| \sqrt{3} - 1 \right|.$$

Rješenje 048

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.
Ili ovako:
Apsolutna vrijednost realnog broja x definira se

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Ako je broj x pozitivan broj, onda ga prepišemo: $|x| = x$, $|7| = 7$.

Ako je broj x negativan broj, onda ga pišemo s minusom: $|x| = -x$, $|-4| = -(-4) = 4$.

Budući da je $\sqrt{3}$ približno jednako 1.73,

$$\sqrt{3} \approx 1.73$$

uoči da je

- izraz $\sqrt{3} - 4 = 1.73 - 4 = -2.27 < 0$, negativan
- izraz $\sqrt{3} - 1 = 1.73 - 1 = 0.73 > 0$, pozitivan.

Zato je

$$5 \cdot \left|\sqrt{3} - 4\right| + 4 \cdot \left|\sqrt{3} - 1\right| = 5 \cdot \left|\underbrace{\sqrt{3} - 4}_{-}\right| + 4 \cdot \left|\underbrace{\sqrt{3} - 1}_{+}\right| = 5 \cdot \left(-\left(\sqrt{3} - 4\right)\right) + 4 \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right) =$$

$$= 5 \cdot \left(-\sqrt{3} + 4\right) + 4 \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right) = -5 \cdot \sqrt{3} + 20 + 4 \cdot \sqrt{3} - 4 = -\sqrt{3} + 16 = 16 - \sqrt{3}.$$

Vježba 048

Izračunaj: $3 \cdot \left|\sqrt{3} - 4\right| + 2 \cdot \left|\sqrt{3} - 1\right|$.

Rezultat: $10 - \sqrt{3}$.

Zadatak 049 (Marija, gimnazija)

Dokažite da je $\sqrt{3}$ iracionalni broj.

Rješenje 049

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}.$$

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b ($b \neq 0$) ako postoji cijeli broj k tako da vrijedi

$$a = k \cdot b.$$

Primjer

Broj 45 je djeljiv brojem 9 jer postoji broj 5 tako da vrijedi

$$45 = 5 \cdot 9.$$

Najvećom zajedničkom mjerom prirodnih brojeva nazivamo najveći zajednički djelitelj tih brojeva. Za najveću zajedničku mjeru brojeva a i b uvodi se oznaka M(a, b).

Primjer

$$M(24, 32) = 8.$$

Ako brojevi a i b osim broja 1 nemaju drugih zajedničkih djelitelja kažemo da su relativno prosti brojevi i pišemo

$$M(a, b) = 1.$$

Primjer

$$M(12,\ 31)=1.$$

Iracionalni brojevi jesu brojevi koji se ne mogu prikazati u obliku

$$\frac{a}{b}\ ,\ b\neq 0\ ,\ a\ ,\ b\in Z.$$

Oni, dakle, nisu racionalni brojevi, a možemo ih prikazati u obliku neperiodskih decimalnih brojeva.
Primjer

$$\sqrt{2}\approx 1.41421356...\quad ,\quad \sqrt{3}\approx 1.73205080...\quad ,\quad \sqrt{5}\approx 2.23606797...\quad ,\quad \pi\approx 3.14159265...$$

Svi racionalni i iracionalni brojevi zajedno čine skup realnih brojeva R.
Treba dokazati da je $\sqrt{3}$ iracinalni broj.

Pretpostavit ćemo da to nije istina, da je $\sqrt{3}$ racionalni broj. Pretpostavimo, dakle, da je $\sqrt{3}$ racionalni broj, da se može napisati

$$\sqrt{3}=\frac{a}{b}$$

uz pretpostavku da je razlomak $\frac{a}{b}$ skraćen do kraja (ako nije skratimo ga), tj. da prirodni brojevi a i b nemaju zajedničkih faktora osim broja 1. Brojevi a i b su, dakle, relativno prosti brojevi,

$$M(a,\ b)=1.$$

Kvadriranjem i sređivanjem slijedi

$$\sqrt{3}=\frac{a}{b}\ \Rightarrow\ \sqrt{3}=\frac{a}{b}\ /^{2}\ \Rightarrow\ \left(\sqrt{3}\right)^{2}=\left(\frac{a}{b}\right)^{2}\ \Rightarrow\ 3=\frac{a^{2}}{b^{2}}\ \Rightarrow\ \frac{a^{2}}{b^{2}}=3\ /\cdot b^{2}\ \Rightarrow\ a^{2}=3\cdot b^{2}.$$

Gledaj jednakost

$$a^{2}=3\cdot b^{2}.$$

Na desnoj strani pojavljuje se faktor 3 što znači da bi i izraz na lijevoj strani a^2 morao, također, biti djeljiv sa 3.
Da bi a^2 bio djeljiv sa 3 mora a biti djeljiv sa 3 pa se piše u obliku

$$a=3\cdot m\ \text{ za svaki }\ m\in N.$$

Uvrstimo li

$$a=3\cdot m$$

u jednakost

$$a^{2}=3\cdot b^{2}$$

i skratimo, dobije se

$$\left.\begin{matrix} a=3\cdot m \\ a^{2}=3\cdot b^{2}\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ (3\cdot m)^{2}=3\cdot b^{2}\ \Rightarrow\ 9\cdot m^{2}=3\cdot b^{2}\ /:3\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 3\cdot m^{2}=b^{2}\ \Rightarrow\ b^{2}=3\cdot m^{2}.$$

Ponovno se na desnoj strani pojavljuje faktor 3 što znači da bi i izraz na lijevoj strani b^2 morao, također, biti djeljiv sa 3.
Da bi b^2 bio djeljiv sa 3 mora b biti djeljiv sa 3 pa se piše u obliku

$$b=3\cdot n\ \text{ za svaki }\ n\in N.$$

Stoga a i b imaju zajednički faktor 3

$$a=3\cdot m\quad ,\quad b=3\cdot n$$

što je u suprotnosti (kontradikciji) s pretpostavkom da je $\frac{a}{b}$ do kraja skraćen razlomak, tj. da su a i b

relativno prosti brojevi. Znači naša početna pretpostavka da je $\sqrt{3}$ racionalni broj bila je pogrešna. Dakle,

$$\sqrt{3} \notin Q.$$

Broj $\sqrt{3}$ nije racionalni broj, on je iracionalni.

Vježba 049

Dokažite da je $\sqrt{5}$ iracionalni broj.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 050 (Mirza, elektrotehnička škola)

Nacrtaj graf: $y = -2^{-|x|}$.

Rješenje 050

Ponovimo!

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad a^0 = 1 \quad , \quad a^1 = a.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.

Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja x definira se

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Ako je broj x pozitivan broj, onda ga prepišemo: | x | = x, | 7 | = 7.

Ako je broj x negativan broj, onda ga pišemo s minusom: | x | = – x, | – 4 | = – (– 4) = 4.

Izračunamo vrijednosti funkcije

$$f(x) = -2^{-|x|} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2^{|x|}}$$

za, na primjer,

$$x = -3,\ x = -2,\ x = -1,\ x = 0,\ x = 1,\ x = 2,\ x = 3.$$

$$x = -3 \Rightarrow y = -\frac{1}{2^{|-3|}} \Rightarrow y = -\frac{1}{2^3} \Rightarrow y = -\frac{1}{8}.$$

$$x = -2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2^{|-2|}} \Rightarrow y = -\frac{1}{2^2} \Rightarrow y = -\frac{1}{4}.$$

$$x = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2^{|-1|}} \Rightarrow y = -\frac{1}{2^1} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}.$$

$$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2^{|0|}} \Rightarrow y = -\frac{1}{2^0} \Rightarrow y = -\frac{1}{1} \Rightarrow y = -1.$$

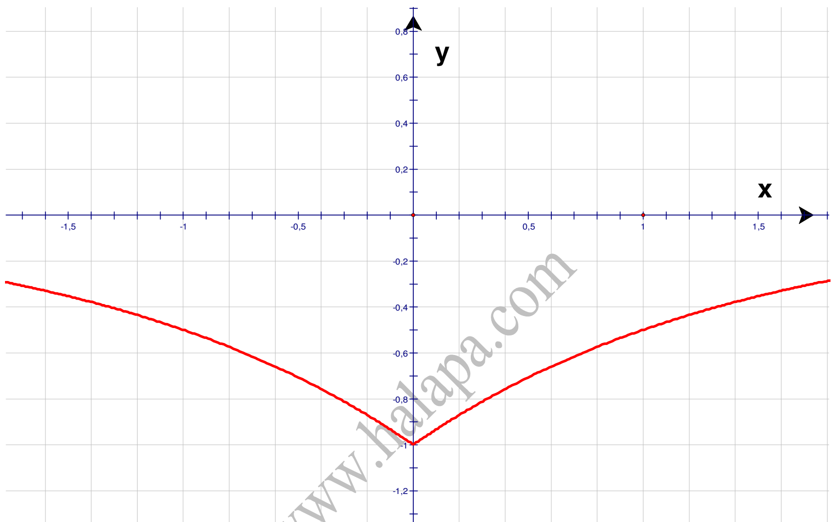
$$x=1 \;\Rightarrow\; y=-\frac{1}{2^{|1|}} \;\Rightarrow\; y=-\frac{1}{2^{1}} \;\Rightarrow\; y=-\frac{1}{2}.$$

$$x=2 \;\Rightarrow\; y=-\frac{1}{2^{|2|}} \;\Rightarrow\; y=-\frac{1}{2^{2}} \;\Rightarrow\; y=-\frac{1}{4}.$$

$$x=3 \;\Rightarrow\; y=-\frac{1}{2^{|3|}} \;\Rightarrow\; y=-\frac{1}{2^{3}} \;\Rightarrow\; y=-\frac{1}{8}.$$

Tablica zadanih argumenata x i njima pripadnih vrijednosti izgleda ovako:

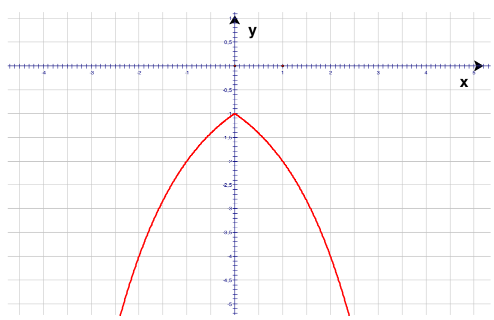
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$



Vježba 050

Nacrtaj graf: $y=-2^{|x|}$.

Rezultat:



Zadatak 051 (Goran, srednja škola)

Izračunaj $\dfrac{a\cdot|a-b|-b\cdot|a+b|}{|a-b|-|a+b|}$, ako je $a=\sqrt{2},\ b=-\sqrt{3}$.

Rješenje 051

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.

Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja x definira se

$$|x|=\begin{cases} x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -x, & x<0 \end{cases}.$$

Ako je broj x pozitivan broj, onda ga prepišemo: | x | = x, | 7 | = 7.

Ako je broj x negativan broj, onda ga pišemo s minusom: | x | = – x, | – 4 | = – (– 4) = 4.

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad\left(\sqrt{a}\right)^2=a\quad,\quad\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}.$$

U zadani izraz uvrstimo vrijednosti od a i b.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a\cdot|a-b|-b\cdot|a+b|}{|a-b|-|a+b|}\\ a=\sqrt{2}\ ,\ b=-\sqrt{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}\cdot\left|\sqrt{2}-\left(-\sqrt{3}\right)\right|-\left(-\sqrt{3}\right)\cdot\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}{\left|\sqrt{2}-\left(-\sqrt{3}\right)\right|-\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cdot\left|\sqrt{2}+\sqrt{3}\right|+\sqrt{3}\cdot\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}{\left|\sqrt{2}+\sqrt{3}\right|-\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}=\frac{\sqrt{2}\cdot\left|\underbrace{\sqrt{2}+\sqrt{3}}_{\text{pozitivno}}\right|+\sqrt{3}\cdot\left|\underbrace{\sqrt{2}-\sqrt{3}}_{\text{negativno}}\right|}{\left|\underbrace{\sqrt{2}+\sqrt{3}}_{\text{pozitivno}}\right|-\left|\underbrace{\sqrt{2}-\sqrt{3}}_{\text{negativno}}\right|}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\cdot\left(-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\left(-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\right)}=\frac{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\cdot\left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{6}-\sqrt{6}+\left(\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{6}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{5}{2\cdot\sqrt{2}}=\left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{array}\right]=\frac{5}{2\cdot\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2\cdot 2}=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{4}.$$

Vježba 051

Izračunaj $\dfrac{|a-b|-|a+b|}{a\cdot|a-b|-b\cdot|a+b|}$, ako je $a=\sqrt{2},\ b=-\sqrt{3}.$

Rezultat: $\dfrac{2\cdot\sqrt{2}}{5}.$

Zadatak 052 (Goran, srednja škola)

Koliko je: $\sqrt{9\cdot x^2+6\cdot x+1}$ za $x>-\frac{1}{3}$?

Rješenje 052

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja x definira se

$$|x|=\begin{cases} x, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x, & x<0\end{cases}.$$

Ako je broj x pozitivan broj, onda ga prepišemo: $|x| = x$, $|7| = 7$.

Ako je broj x negativan broj, onda ga pišemo s minusom: $|x| = -x$, $|-4| = -(-4) = 4$.

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \sqrt{a^2}=|a|.$$

Računamo drugi korijen.

$$\sqrt{9\cdot x^2+6\cdot x+1}=\sqrt{(3\cdot x+1)^2}=|3\cdot x+1|.$$

Uočimo da je izraz $3 \cdot x + 1$ pozitivan za $x>-\frac{1}{3}$ pa slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} |3\cdot x+1| \\ x>-\frac{1}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow \left|\underbrace{3\cdot x+1}_{\text{pozitivno}}\right|=3\cdot x+1.$$

Vježba 052

Koliko je: $\sqrt{9\cdot x^2+6\cdot x+1}$ za $x<-\frac{1}{3}$?

Rezultat: $-3\cdot x-1.$

Zadatak 053 (Goran, srednja škola)

Skrati razlomak: $\frac{x^2-1}{x^2+2\cdot|x|+1}$.

Rješenje 053

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja x definira se

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Ako je broj x pozitivan broj, onda ga prepišemo: | x | = x, | 5 | = 5.
Ako je broj x negativan broj, onda ga pišemo s minusom: | x | = – x, | – 5 | = – (– 5) = 5.

$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2.$$

Promatramo dva slučaja.
1. slučaj

$x \ge 0 \ \Rightarrow \ |x| = x$

$$\frac{x^2-1}{x^2+2\cdot|x|+1} = \frac{x^2-1}{x^2+2\cdot x+1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x-1}{x+1}.$$

2. slučaj

$x < 0 \ \Rightarrow \ |x| = -x$

$$\frac{x^2-1}{x^2+2\cdot|x|+1} = \frac{x^2-1}{x^2+2\cdot(-x)+1} = \frac{x^2-1}{x^2-2\cdot x+1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x-1}.$$

Vježba 053

Skrati razlomak: $\frac{x^2+2\cdot|x|+1}{x^2-1}$.

Rezultat: 1. slučaj $\frac{x+1}{x-1}$, 2. slučaj $\frac{x-1}{x+1}$.

Zadatak 054 (Goran, srednja škola)

Odredi koordinatu x točke T(x) i tu točku prikaži na brojevnom pravcu ako je $|3\cdot x+2| = \frac{1}{3}$.

Rješenje 054

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj | x | koji određujemo na ovaj način:

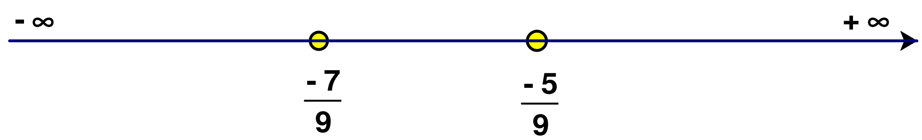
$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi | x | = x.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je | x | = – x.
Ili ovako:
Apsolutna vrijednost realnog broja x definira se

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Ako je broj x pozitivan broj, onda ga prepišemo: | x | = x, | 3 | = 3.
Ako je broj x negativan broj, onda ga pišemo s minusom: | x | = – x, | – 3 | = – (– 3) = 3.
Promatramo dva slučaja, dvije jednadžbe.

$\left|3 \cdot x+2\right|=\frac{1}{3}$	
$3 \cdot x+2=-\frac{1}{3}$	$3 \cdot x+2=\frac{1}{3}$
$3 \cdot x+2=-\frac{1}{3} \quad / \cdot 3$	$3 \cdot x+2=\frac{1}{3} \quad / \cdot 3$
$9 \cdot x+6=-1$	$9 \cdot x+6=1$
$9 \cdot x=-1-6$	$9 \cdot x=1-6$
$9 \cdot x=-7$	$9 \cdot x=-5$
$9 \cdot x=-7 \quad /:9$	$9 \cdot x=-5 \quad /:9$
$x_1=-\frac{7}{9}$	$x_2=-\frac{5}{9}$



Vježba 054

Odredi koordinatu x točke T(x) ako je $\left|x+2\right|=4$.

Rezultat: 2, – 6.

Zadatak 055 (Goran, srednja škola)

Prikaži na brojevnom pravcu skup svih točaka T(x) za čije koordinate x vrijedi: $\left|x\right|>\frac{5}{4}$.

Rješenje 055

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$\left|x\right|=\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.

Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja x definira se

$$\left|x\right|=\begin{cases} x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -x, & x<0 \end{cases}.$$

Ako je broj x pozitivan broj, onda ga prepišemo: $|x| = x$, $|9| = 9$.

Ako je broj x negativan broj, onda ga pišemo s minusom: $|x| = -x$, $|-9| = -(-9) = 9$.

Promatramo dva slučaja.

1. slučaj

$x \geq 0 \;\Rightarrow\; \left|x\right|=x$

$$\left.\begin{array}{l} \left|x\right|=x \\ \left|x\right|>\frac{5}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow x>\frac{5}{4} \Rightarrow x \in \left\langle \frac{5}{4}, +\infty \right\rangle.$$

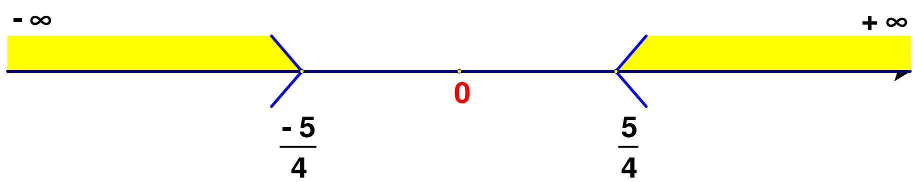
2. slučaj

$x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

$$\left.\begin{array}{l} |x| = -x \\ |x| > \frac{5}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow -x > \frac{5}{4} \Rightarrow -x > \frac{5}{4} \;/\cdot(-1) \Rightarrow x < -\frac{5}{4} \Rightarrow x \in \left\langle -\infty, -\frac{5}{4} \right\rangle.$$

Skup svih traženih točaka je unija dva intervala:

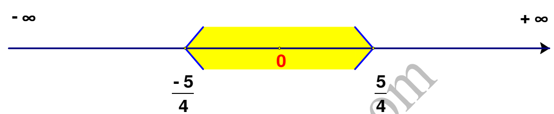
$$x \in \left\langle -\infty, -\frac{5}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{4}, +\infty \right\rangle.$$



Vježba 055

Prikaži na brojevnom pravcu skup svih točaka T(x) za čije koordinate x vrijedi: $|x| < \frac{5}{4}.$

Rezultat:



Zadatak 056 (Vedran, gimnazija)

Ako je (x, y) rješenje jednadžbe $|2 \cdot x + 3 \cdot y + 1| + |x - y + 1| = 0$, onda je:

$A)\ |x - y| = 1 \qquad B)\ |x - y| = 2 \qquad C)\ |x - y| = 3 \qquad D)\ |x - y| = 4$

Rješenje 056

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.

Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja x definira se

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Ako je broj x pozitivan broj, onda ga prepišemo: | x | = x, | 9 | = 9.

Ako je broj x negativan broj, onda ga pišemo s minusom: | x | = – x, | – 9 | = – (– 9) = 9.

$$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad , \quad \frac{a}{1} = a \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a - b}{n}.$$

$$|a| + |b| = 0 \Leftrightarrow a = b = 0.$$

Transformiramo jednadžbu s apsolutnim vrijednostima u sustav dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice.

$$|2\cdot x+3\cdot y+1|+|x-y+1|=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2\cdot x+3\cdot y+1=0 \\ x-y+1=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2\cdot x+3\cdot y=-1 \\ x-y=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2\cdot x+3\cdot y=-1 \\ x-y=-1 \;/\cdot 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2\cdot x+3\cdot y=-1 \\ 3\cdot x-3\cdot y=-3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5\cdot x=-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\cdot x=-4 \;/:5 \Rightarrow x=-\frac{4}{5}.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{matrix} x=-\frac{4}{5} \\ x-y=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -\frac{4}{5}-y=-1 \Rightarrow -\frac{4}{5}-y=-1 \;/\cdot(-1) \Rightarrow \frac{4}{5}+y=1 \Rightarrow y=1-\frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{1}-\frac{4}{5} \Rightarrow y=\frac{5-4}{5} \Rightarrow y=\frac{1}{5}.$$

Tada je:

$$|x-y|=\left|-\frac{4}{5}-\frac{1}{5}\right|=\left|-\frac{5}{5}\right|=|-1|=1.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 056

Ako je (x, y) rješenje jednadžbe $|2\cdot x+3\cdot y+1|+|x-y+1|=0$, onda je:

$A)\ |x+y|=\frac{3}{5}$ $\quad B)\ |x+y|=1$ $\quad C)\ |x+y|=\frac{2}{5}$ $\quad D)\ |x+y|=\frac{1}{5}$

Rezultat: A.

Zadatak 057 (Martina, gimnazija)

Koliko je $\left|1-\sqrt{2}\right|+\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{3}-\sqrt{4}\right|+\ \ldots\ +\left|\sqrt{99}-\sqrt{100}\right|$?

Rješenje 057

Ponovimo!

$$-x+x=0 \quad , \quad \sqrt{x^2}=x \;,\; x\geq 0.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x|=x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x|=-x$.

Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja x definira se

$$|x|=\begin{cases} x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -x, & x<0 \end{cases}.$$

Ako je broj x pozitivan broj, onda ga prepišemo: | x | = x, | 9 | = 9.

Ako je broj x negativan broj, onda ga pišemo s minusom: | x | = – x, | – 9 | = – (– 9) = 9.

Uočimo da je u svakoj zagradi negativan broj jer je

$$\sqrt{n}<\sqrt{n+1}$$

pa je njegova apsolutna vrijednost njemu negativan broj. Zato je dani izraz jednak

$$\left|1-\sqrt{2}\right|+\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{3}-\sqrt{4}\right|+\ \dots\ +\left|\sqrt{99}-\sqrt{100}\right|=$$

$$=-\left(1-\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{4}\right)-\ \dots\ -\left(\sqrt{99}-\sqrt{100}\right)=$$

$$=-1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{4}-\ \dots\ -\sqrt{99}+\sqrt{100}=$$

$$=-1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{4}-\ \dots\ -\sqrt{99}+\sqrt{100}=-1+\sqrt{100}=-1+\sqrt{10^2}=-1+10=9.$$

Vježba 057

Koliko je $\left|1-\sqrt{2}\right|+\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{3}-\sqrt{4}\right|+\ \dots\ +\left|\sqrt{9999}-\sqrt{10000}\right|$?

Rezultat: 99.

Zadatak 058 (Matija, gimnazija)

Riješi jednadžbu : $x\cdot\left|x-3\right|-2=0.$

Rješenje 058

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja x definira se

$$|x|=\begin{cases} x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -x, & x<0 \end{cases}.$$

Ako je broj x pozitivan broj, onda ga prepišemo: $|x| = x$, $|9| = 9$.

Ako je broj x negativan broj, onda ga pišemo s minusom: $|x| = -x$, $|-9| = -(-9) = 9$.

1.slučaj

Ako je $x - 3 \ge 0$, tj. ako je $x \ge 3$, tada je

$$|x-3|=x-3$$

pa jednadžba glasi

$$x\cdot|x-3|-2=0\ \Rightarrow\ x\cdot(x-3)-2=0.$$

Tada je:

$$x\cdot(x-3)-2=0\ \Rightarrow\ x^2-3\cdot x-2=0\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x^2-3\cdot x-2=0 \\ a=1\ ,\ b=-3\ ,\ c=-2 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-3\ ,\ c=-2 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\}\Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+8}}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\frac{3+\sqrt{17}}{2} \\ x_2=\frac{3-\sqrt{17}}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\sqrt{17}\approx 4.12\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\frac{3+4.12}{2} \\ x_2=\frac{3-4.12}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\frac{7.12}{2} \\ x_2=\frac{-1.12}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=3.56 \\ x_2=-0.56\end{matrix}\right\}.$$

Zbog $x \geq 3$ rješenje je:

$$x_1=\frac{3+\sqrt{17}}{2}.$$

2.slučaj

Ako je $x - 3 < 0$, tj. ako je $x < 3$, tada je

$$|x-3|=-(x-3)=-x+3$$

pa jednadžba glasi

$$x\cdot|x-3|-2=0 \Rightarrow x\cdot(-x+3)-2=0.$$

Tada je:

$$x\cdot(-x+3)-2=0 \Rightarrow -x^2+3\cdot x-2=0 \Rightarrow -x^2+3\cdot x-2=0 \ /\cdot(-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-3\cdot x+2=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2-3\cdot x+2=0 \\ a=1 \ , \ b=-3 \ , \ c=2\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1 \ , \ b=-3 \ , \ c=2 \\ x_{3,4}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{matrix}\right\} \Rightarrow x_{3,4}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{3,4}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{3,4}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2} \Rightarrow x_{3,4}=\frac{3\pm 1}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_3=\frac{3+1}{2} \\ x_4=\frac{3-1}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_3=\frac{4}{2} \\ x_4=\frac{2}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_3=2 \\ x_4=1\end{matrix}\right\}.$$

Zbog $x < 3$ rješenja su:

$$x_3=2 \ , \ x_4=1.$$

Zadana jednadžba ima tri rješenja:

$$\frac{3+\sqrt{17}}{2} \ , \ 2 \ , \ 1.$$

Vježba 058

Riješi jednadžbu: $x\cdot|4-x|=3.$

Rezultat: $1 \ , \ 3 \ , \ 2+\sqrt{7}.$

Zadatak 059 (Antonio, srednja škola)

Riješi jednadžbu: $|x|-2=\frac{3}{|x|}.$

Rješenje 059

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.
Ili ovako:
Apsolutna vrijednost realnog broja x definira se

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Ako je broj x pozitivan broj, onda ga prepišemo: $|x| = x$, $|9| = 9$.
Ako je broj x negativan broj, onda ga pišemo s minusom: $|x| = -x$, $|-9| = -(-9) = 9$.
Jednadžbu ćemo riješiti metodom supstitucije. Uvedemo zamjenu (supstituciju)

$$t = |x|$$

pa jednadžba glasi

$$\left.\begin{array}{l} |x| - 2 = \dfrac{3}{|x|} \\ t = |x| \end{array}\right\} \Rightarrow t - 2 = \frac{3}{t} \Rightarrow t - 2 = \frac{3}{t} \;/\cdot t \Rightarrow t^2 - 2\cdot t = 3 \Rightarrow t^2 - 2\cdot t - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} t^2 - 2\cdot t - 3 = 0 \\ a = 1 \;,\; b = -2 \;,\; c = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \;,\; b = -2 \;,\; c = -3 \\ t_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{2+4}{2} \\ t_2 = \dfrac{2-4}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{6}{2} \\ t_2 = -\dfrac{2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = 3 \\ t_2 = -1 \end{array}\right\}.$$

Vraćamo se supstituciji.

- $\left.\begin{array}{l} t = |x| \\ t = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 3.$
- $\left.\begin{array}{l} t = |x| \\ t = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow |x| = -1$ nema smisla jer je $|x| \ge 0$ za svaki $x \in R$.

Vježba 059

Riješi jednadžbu : $|x| - 3 = \dfrac{4}{|x|}$.

Rezultat: $x_{1,2} = \pm 4.$

Zadatak 060 (Matija, srednja škola)

Koliko uređenih parova realnih brojeva zadovoljava sustav jednadžbi $\begin{cases} x+3\cdot|y|=1 \\ x+y=-3. \end{cases}$

$A.\ 0 \qquad B.\ 1 \qquad C.\ 2 \qquad D.\ 3$

Rješenje 060

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja x definira se

$$|x|=\begin{cases} x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -x, & x<0 \end{cases}.$$

Ako je broj x pozitivan broj, onda ga prepišemo: $|x| = x$, $|9| = 9$.

Ako je broj x negativan broj, onda ga pišemo s minusom: $|x| = -x$, $|-9| = -(-9) = 9$.

Oduzimanjem druge jednadžbe od prve dobije se:

$$\left.\begin{matrix} x+3\cdot|y|=1 \\ x+y=-3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+3\cdot|y|=1 \\ x+y=-3\ /\cdot(-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+3\cdot|y|=1 \\ -x-y=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3\cdot|y|-y=4.$$

U jednadžbi s apsolutnom vrijednošću

$$3\cdot|y|-y=4$$

razlikujemo dva slučaja.

1.slučaj

$$\left.\begin{matrix} y\ge 0 \\ 3\cdot|y|-y=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3\cdot y-y=4 \Rightarrow 2\cdot y=4 \Rightarrow 2\cdot y=4\ /:2 \Rightarrow y=2.$$

Računamo nepoznanicu x.

$$\left.\begin{matrix} x+y=-3 \\ y=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x+2=-3 \Rightarrow x=-3-2 \Rightarrow x=-5.$$

Rješenje je uređeni par

$$(x_1,\ y_1)=(-5,\ 2).$$

2.slučaj

$$\left.\begin{matrix} y<0 \\ 3\cdot|y|-y=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3\cdot(-y)-y=4 \Rightarrow -3\cdot y-y=4 \Rightarrow -4\cdot y=4 \Rightarrow -4\cdot y=4\ /:(-4) \Rightarrow y=-1.$$

Računamo nepoznanicu x.

$$\left.\begin{matrix} x+y=-3 \\ y=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x-1=-3 \Rightarrow x=-3+1 \Rightarrow x=-2.$$

Rješenje je uređeni par

$$(x_2,\ y_2)=(-2,\ -1).$$

Postoje dva uređena para.
Odgovor je pod C.

Vježba 060

Koliko uređenih parova realnih brojeva zadovoljava sustav jednadžbi $\begin{cases} x + |y| = 6 \\ x + y = -2. \end{cases}$

A. 0 *B.* 1 *C.* 2 *D.* 3

Rezultat: B.